Nature et logique de G. Gentzen à J-Y. Girard [*]

Jean-Baptiste Joinet
Université Paris 1 (Panthéon-Sorbonne), UFR de Philosophie.
Centre International de Recherches : Lettres, Philosophie, Savoirs (USR 3308, CNRS & École Normale Supérieure).

Résumé : La conception de la logique de J.-Y. Girard s'enracine dans la critique de la naturalité logique opérée par G. Gentzen dans les années 1930. Récemment, Girard a radicalisé cette critique et proposé une entreprise de refondation de la logique comme produit d'une théorie générale de l'interaction. La présente étude vise à montrer que cette entreprise va dans le sens d'une réunification de l'idée de logique naturelle et de celle de logique de la nature.

Abstract : J.-Y. Girard's conception of logic originates in the critique of logical naturality made by G. Gentzen around 1930. Recently, Girard radicalized this critique and proposed a program for new foundations for logic, as a product of a general theory of interaction. The present paper is an attempt to show that this program tends to reunify the idea of natural logic and the idea of a logic of nature.

---

*. Article rédigé pendant l'été 2008, en vue d'une parution dans le premier numéro d'une revue qui devait voir le jour, *De scientia* (« revue semestrielle du groupe de recherche franco-italien *Pensée des sciences* », sous la responsabilité conjointe de Mario Castellana, Università degli studi di Bari et de Charles Alunni, École normale supérieure de Paris). Ce premier numéro était censé paraître en 2008, mais n'est jamais sorti. Malgré les assurances réitérées des responsables de la revue, l'auteur du présent article doute aujourd'hui que le premier numéro de cette revue paraisse un jour et compte l'intégrer à un volume en cours de préparation sur "La question de la naturalité en logique et linguistique".

Pour qualifier la rupture intervenue en logique dans les années 1970, rupture dont les effets se prolongent encore aujourd'hui, l'image d'une "révolution copernicienne" [1] ne semble pas excessive. En quelques dizaines d'années, l'ancien "paradigme logique" a proprement éclaté : la discipline s'est engagée dans une redéfinition de son projet autour d'un nouvel objet [2] et se dégage progressivement du système de préjugés, invisible à force d'être familier [3], qui bornait son questionnement.

Si les temps et les lieux de cette révolution sont certainement multiples - l'activité scientifique est avant tout affaire de communautés -, le rôle des idées délétères et salutaires de Jean-Yves Girard en tant qu'accélérateur de cette recomposition apparaît distinctement, avec le recul, comme déterminant.

Dans le présent article, plutôt que de retracer la petite histoire convenue de ces évolutions le long d'un fil des événements scientifiques, à la linéarité largement imaginaire, où la fameuse découverte de la « correspondance de Curry-Howard » tiendrait lieu d'origine, je m'attacherai à montrer d'une part comment, sur une échelle de temps plus longue, l'attitude épistémologique et la conception de la logique de Girard s'enracinent dans la critique de la naturalité logique opérée par Gerhard Gentzen [4] dans ses travaux logiques, d'autre part comment, radicalisant cette critique, Girard en vient à réunifier, sur un mode non métaphorique, l'idée de logique naturelle et celle de logique de la nature.

---

1. Cf. J-Y Girard, « Le point aveugle », tome 2, Hermann, 2007, p. 368.

2. Cf. J-B. Joinet, « Proofs, reasoning and the metamorphosis of logic », à paraître chez Springer dans les actes impatiemment attendus depuis dix ans du colloque « Natural Deduction » (organisé à la Pontifícia Universidade Católica de Rio de Janeiro, en 2001), Luiz Carlos Pereira & Valeria de Paiva (eds). Cf. Aussi J-Y. Girard, « Le point aveugle », tome 1, section 7.1.

3. Cf. dans J-Y. Girard, « Le point aveugle », le thème récurrent du « préjugé essentialiste » (p. 408), du « filtre idéologique essentialiste » hérité de la tradition logique (p. 365). Voir en particulier sur ce point les pages 394 et 395.

4. G. Gentzen, (1909 -1945). Pour des informations biographiques plus précises, on peut consulter l'article de P. Vihan (« The last months of Gerhard Gentzen in Prague », Collegium logicum, Vol. 1, Vienna, 1995, p. 1-7) qui affronte les aspects sombres de la vie de Gentzen, nommé par l'Allemagne nazie professeur d'université dans Prague occupée, où il périra sur fond de déroute des armées du Reich. Pour la présente étude, seuls les travaux mathématiques et les réflexions sur les fondements des mathématiques de Gentzen ont été pris en compte (à savoir les textes rassemblés dans M. E. Szabo (ed). « Collected Papers of Gerhard Gentzen », collection Studies in Logic, North-Holland, Amsterdam, 1969 et diverses traductions françaises des plus importants d'entre eux, notamment dans J. Largeault, « Intuitionisme et théorie de la démonstration », Vrin, Paris, 1992).

1. Infini dynamique et constructivité procédurale

Lorsque paraît, en 1935-1936, « Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie » de G. Gentzen, le débat fondationnel provoqué par la découverte des « antinomies » dans la théorie des ensembles est à son point culminant : non seulement, parce que les positions *philosophiques* affinées au fil de ce dialogue sont désormais on ne peut plus tranchées, mais surtout parce que les propositions *méthodologiques* de Hilbert sont ébranlées par la récente publication par Gödel de son fameux théorème d'incomplétude.

De ce débat fondationnel, le jeune Gentzen maîtrise à l'évidence tous les aspects – mathématiques bien sûr [5], mais philosophiques également (comme le démontre le panorama très complet des débats qu'il peint en introduction et en conclusion de ce travail).

Si dans ce moment éminemment critique d'un débat fondationnel qu'il domine pleinement, Gentzen peut continuer à se positionner en défenseur serein du *programme de Hilbert* [6] et même envisager pour ce programme un avenir [7], c'est que tout en restant conforme à l'objectif hilbertien (développer une méta-mathématique pour donner des démonstrations de non dérivabilité de contradictions), le travail qu'il publie amende substantiellement les termes du projet méthodologique hilbertien (la preuve de cohérence de 1936 réalise en effet le remplacement du finitisme *stricto sensu* [8] par un "constructivisme ordinal" [9]), et, au plan philosophique, amorce du même coup, par un double geste,

5. Doctorant, Gentzen fut dirigé par Hermann Weyl. En outre, il fut pendant cette période un grand lecteur des travaux mathématiques et logiques de ses contemporains, comme en témoigne le grand nombre de recensions qu'il a effectuées.

6. Selon Jean Largeault, « Glossaire in Logique mathématique : textes », p. 262, Armand Colin, 1972, c'est Gentzen qui aurait introduit le mot « programme » pour désigner l'ensemble des idées de Hilbert. Il continuera d'ailleurs durablement à assumer et revendiquer cette filiation, cf. Dag Prawitz, « Natural deduction. A proof-theoretical study », Stockholm studies in philosophy series, Almqvist & Wiksell, Stockholm, 1965 (édition consultée : Dover publications inc., Mineola, New-York, USA, 2006). Notes d'après la préface de l'édition Dover, écrite spécialement pour cette ré-édition de 2006). Dag Prawitz. cite « une lettre de Gentzen citée par Mentzler-Troot dans son livre« Gentzens Problem », Birkhaüser, Basel, 2001, p. 35 ».

7. Cf. Gentzen, « Première démonstration », in Largeault, Intuitionisme et théorie de la démonstration, p. 354-355. J. Cavaillès, dont l'essai « Méthode axiomatique et formalisme - essai sur le problème du fondement des mathématiques », publié pour la première fois en 1937, s'achève symptomatiquement par une analyse de l'approche Gentzen dont l'enjeu ne lui échappe pas (édition consultée, Hermann, 1981, Paris).

8. Même si Hilbert n'est jamais précis sur ce qu'il considère comme moyens finitistes. . .

9. Mais comme le dit Largeault citant G. Kreisel (« Gentzen Collected papers, M.E. Szabo ed. », Journal of Philosophy 68, n˚8, 1971, p. 240), à propos de Gentzen : « l'analyse de la signification d'une démonstration de consistance peut-être plus

une réappropriation du programme de Hilbert et un déplacement du débat fondationnel.

Le premier de ces gestes, qu'au prix d'un anachronisme utile, on pourrait décrire comme l'internalisation procédurale de l'infini [10], est l'indice manifeste de la tendance anti-essentialiste présente chez Gentzen. S'il a une conscience claire du lien étroit entre la question de la cohérence et celle de l'infini, il congédie la question du statut ontologique de l'infini « actuel » hors du champ des questions scientifiques testables à travers les outils de sa discipline :« Si et en quelle mesure quelque chose de "réel" correspond au sens actualiste d'une proposition transfinie, en dehors de ce qu'exprime son sens finitiste restreint, voilà une question à quoi la démonstration de consistance n'a pas de réponse à offrir » [11]. Processuel dans l'économie des jeux de langage mathématiques et producteur concret d'effets finitistes, l'infini n'a plus besoin d'un "correspondant" référentiel dans un hypothétique "réel" qui fonderait sa signification.

Cette grande prudence de Gentzen quant à la portée ontologique de son travail relativement à l'infini ensembliste, ne doit pas être comprise comme un rejet pur et simple de l'infini. Il s'agit plutôt du remplacement des approches « statiques » de l'infini dont la notion de cardinal est emblématique, par un infini dynamique. Les passages de ses démonstrations de cohérence dans lesquelles, il recherche dans les preuves, les sources de l'accroissement de complexité des processus de normalisation, autrement dit d'*analytisation* [12] de ces preuves, sont à cet égard emblématiques. On peut, à bon droit, mettre ces observations de Gentzen en résonance avec les remarques ultérieures de Girard (sur les « règles structurelles » génératrices d'infini) qui conduiront à la logique linéaire (où les sources procédurales de l'infini dynamique sont en

difficile que cette démonstration elle-même ». (Largeault, Logique mathématique : textes, Armand Colin, Coll. U, Paris, 1972, p. 218).

10. Le terme procédural est introduit par J.-Y. Girard dans « La logique comme géométrie du cognitif », in Logique, dynamique et cognition, sous la dir. de J-B. Joinet, Publications de la Sorbonne, Paris, 2007. Le terme « procédural » n'a bien sûr pas le sens de « bureaucratique » : il se comprend en opposition à « essentialiste ».

11. G. Gentzen,« Die widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie », Math. Annal. 112, 1935, p. 493-565. Edition consultée :« La consistance de l'arithmétique élémentaire », traduction de Jean Largeault, in Largeault, Intuitionisme et théorie de la démonstration, p. 357. Voir aussi J. Cavaillès, « Méthode axiomatique et formalisme - essai sur le problème du fondement des mathématiques », Hermann, 1981, Paris, p. 170. Dans le passage cité, Gentzen renvoie en quelque sorte l'essentialisme à son statut d'idéologie scientifique au sens où G. Canghilhem entendait ces mots : l'utilisation des résultats d'une science comme support ou renfort d'un système de préjugés.

12. « Analytisation » désigne l'action de rendre (une preuve) analytique (à bien distinguer, donc, d'« analyse » : d'où le néologisme).

quelque sorte incarnées dans le langage logique lui-même via ces seules « traces formelles de l'infini en logique [que sont] les exponentielles » [13]).

Si l'on trouvait déjà chez Hilbert un regard non essentialiste sur l'infini (l'infini comme élément idéal, comme manière de parler, comme fiction utile mais éliminable sous réserve de limiter son être à ses effets finitistes), il convient d'observer qu'on est avec Gentzen un cran au dessus du slogan hilbertien. La légitimisation des règles de démonstration et des usages de l'infini (gagée sur la non-contradiction, comme dans la perspective sémantique hilbertienne : « le sens, c'est la cohérence ») se double ici d'une théorie beaucoup plus raffinée de la signification. Celle-ci est abordée comme processus concret, procédural, d'évaluation, sous une forme qui comme le souligne JY. Girard [14] constitue le premier exemple d'interprétation « interactive » de la logique [15].

Le second geste décisif de ce premier Gentzen peut être décrit comme une objectivation (une dé-subjectivisation) achevée du constructif. La notion de "construction", centrale chez Brouwer [16] (qui revendiquera sur ce point d'être rattaché à la tradition kantienne et sa conception de l'activité mathématique comme construction de concepts) désigne un processus mental, et la thèse philosophique de l'incommensurabilité du langage et de la pensée, cruciale dans la critique du « formalisme » hilbertien par Brouwer, s'appuie en particulier sur l'idée que le signe n'est pas générateur, sans considération donc pour l'idée d'une dimension processuelle, génératrice d'effets, attachée aux symboles. Mais la mise au jour par Gentzen des effets dynamiques du langage, policés dans les preuves par les règles de la logique, vient précisément saper l'argument brouwerien et signe la migration des « constructions » de l'espace de la subjectivité vers l'espace concret des processus dont le langage envisagé comme producteur d'effets est le siège.

2. Le premier Gentzen ou la naturalité comme levier contre les contempteurs de l'artificialité logique

Hilbert lui-même présentait son "programme" comme un projet méthodologique visant à régler par des moyens mathématiques un pro-

13. J-Y.Girard, « Le point aveugle », tome 2, Hermann, 2007, Paris, p. 397
14. J-Y.Girard, « Le point aveugle », tome 1, Hermann, 2006, Paris, p. 10 et Tome 2 (2007) p. 290-291.
15. Voir en particulier le §9 du titre III de la "première démonstration" de Gentzen.
16. La dimension subjective, « représentationelle » de la notion de « constuction » est centrale chez Brouwer dès son *Qu'on ne peut pas se fier aux principes logiques* (cf. « Intuitionisme et théorie de la démonstration », textes réunis et commentés par Jean Largeault, Vrin, Paris, 1992, p. 20).

blème philosophique [17]. Par suite, on a souvent interprété les résultats d'incomplétude comme un argument mathématique en faveur tantôt d'un réalisme conceptuel mathématique, tantôt d'un subjectivisme mathématique (irréductibilité de la rationalité au langage). Les analyses qui précèdent montrent pourtant que, s'il ne sauve pas le programme de Hilbert de son échec littéral, le réinvestissement par le premier Gentzen du projet hilbertien préserve les deux postures philosophiques hilbertiennes - son anti-essentialisme et son anti-subjectivisme [18] - en leur donnant l'assise mathématique adéquate. Méthodologiquement parlant, le point de vue s'est toutefois considérablement décalé : "simple" *méta-mathématique de la prouvabilité* dans le projet hilbertien, la théorie de la démonstration devient dans les mains de Gentzen une *mathématique des preuves*.

Quoique accomplies en liaison avec les objectifs hilbertiens et tendues vers eux, les recherches de Gentzen sur la représentation des *preuves*, sur leur statut et leur état (par opposition donc, à une attention exclusive ou principale aux questions de *prouvabilité*) ont ainsi débouché sur la constitution d'un nouveau domaine d'objets, dont l'investigation mathématique a fini par dépasser en importance le projet métamathématique initial.

Le fait que diverses tentatives d'élaboration de systèmes de « déduction (d'une conclusion) sous hypothèses » aient été proposées à peu près simultanément (et de manière apparemment indépendante) au début des années trente, voire dès le milieu des années vingt [19],

17. « Sur le plan philosophique, l'importance de notre problème de la cohérence des axiomes est reconnue ; cependant je ne trouve nulle part dans toute cette littérature le moindre pas vers une solution au sens mathématique du mot », D. Hilbert, *Nouvelle fondation des mathématiques, première communication*, in « Intuitionisme et théorie de la démonstration », textes réunis et commentés par Jean Largeault, Vrin, Paris, 1992, p. 116).

18. La revendication par Hilbert d'une filiation kantienne semble assez rhétorique et manque de consistance. Elle n'a en tout cas pas le sens d'un appel à la subjectivité fût-elle transcendantale.

19. Cf. la "méthode des suppositions" de Stanislaw Jaskowski publiée dans « On the Rules of Supposition in Formal Logic », en écho au programme lancé en 1926 par Jan Lukasiewicz visant l'élaboration de sytèmes logiques plus proches qu'ils ne l'étaient alors, des pratiques démonstratives effectives des mathématiciens (systèmes de "logique suppositionnelle" comme on disait, semble-t-il, à l'époque) rendant compte en particulier du maniement des hypothèses. A en croire « Mal a Encyklopedia Logiki », la Petite Encyclopédie de Logique, publiée par W. Marciszewski (ed.) (Wroclaw, Warszawa, Krakow, 1970), les premières ébauches de formalisation de "preuves suppositionnelles" dans le contexte polonais remontent aux actes du premier Congrès mathématique polonais à Cracovie en 1927, intitulé « Ksiega pamiatkowa pierwszego polskiego zjazdu matematycznego ». Voir aussi Corrado Mangione et Sivio Bozzi, « Storia della logica - da Boole ai nostri giorni », Garzanti, Milano, 1993, note 20, p. 612.

mérite certainement d'être mis en regard des critiques alors émergentes qui furent opposées aux conceptions “formalistes”, critiques formulées notamment par le courant intuitionniste congédiant les systèmes de déduction comme autant de « formalismes vides », autant de jeux insignifiants sur des symboles dénués de toute signification.

Ce reproche, à dire vrai, était particulièrement facile à adresser aux systèmes formels alors prédominants (de type hilbertien) où la plus grande partie des règles sont des règles 0-aires (closes) où les divers composants du langage logique sont manipulés simultanément (par des axiomes holistiques, pourrait-on dire), au prix donc d'une intrication - sans raison apparente - de leur signification respective, et où dériver une simple identité est déjà tout un programme.

En définitive, l'élaboration par Gentzen des systèmes de *déduction naturelle* et la priorité explicitement accordée, lors de cette première phase de ses investigations, à l'objectif de *naturalité* semble donc essentiellement correspondre au besoin de désamorcer les critiques venues de l'intuitionnisme.

En conviant « le déducteur naturel », le mathématicien, sur la scène de la théorie de la démonstration (non pas certes, comme sujet psychologique, mais comme acteur engagé dans des pratiques démonstratives « intuitives » parce que reconnaissables et familières), Gentzen vise donc à libérer la formalisation des accusations d'artificialité lancées par le courant intuitionniste notamment, et donc à compléter la fiabilité hilbertienne fondée sur l'unique exigence de cohérence par une fiabilité fondée sur la naturalité, sur l'imitation du « raisonnement naturel ».

A l'opposé des systèmes « à la Hilbert » tournés vers la question de la prouvabilité, l'élaboration de la déduction naturelle résulte ainsi d'une clarification du sens de chaque connecteur logique par l'examen attentif des pratiques « naturelles » (au sens ici de pratiques historiques effectives) du mathématicien, une sorte de « zoom avant » étant pratiqué sur chaque type d'usage des connecteurs logiques dans le texte mathématique non formalisé (quoique sans doute légèrement idéalisé) comme étape de construction d'une preuve.

3. Le second Gentzen ou la critique de la naturalité logique

Quoiqu'il en soit, compte tenu de l'importance accordée par Gentzen au thème naturaliste dans ses premiers travaux consacrés à la « déduction naturelle » et compte tenu du rôle que joue cette orientation dans le dialogue avec l'anti-formalisme, l'ultérieur abandon par l'inventeur de la déduction naturelle de cette exigence de naturalité, à l'occasion de l'élaboration du second type de systèmes formels de déduction qu'on lui doit (le « calcul des séquents »), signale une rupture.

Au plan épistémologique, celui des critères de la pertinence de l'enquête scientifique, son attitude bascule alors vers une sorte d'esthétisme mathématique où “symétrie”, “simplicité”, “élégance” [20] prennent le pas sur la naturalité : « Il faut reconnaître qu'en général notre nouveau concept de séquent s'écarte déjà légèrement de ce qui est “naturel”, écrit Gentzen, et que son introduction se justifie en premier lieu par les grands avantages formels qu'assure la représentation des formes d'inférence qu'on va indiquer » [21]. Quand la naturalité, critère de sens fondé sur une pratique, hérite des contingences de cette pratique [22] et de ses imperfections mathématiques, elle devient « gênante » [23], et demande à être rectifiée.

Cette “critique de la naturalité” débouche alors sur le dévoilement d'une sorte de seconde nature, mieux structurée [24], sur laquelle Gentzen, comme « enchanté », pose le regard qu'aurait l'intrus dans la caverne d'Ali Baba : « Il y a une symétrie complète entre $\wedge$ et $\vee$ et entre

20. Cf. divers passages de Gentzen, *Seconde démonstration*, in Largeault, « Intuitionisme et Théorie de la démonstration » (p. 367 notamment). On pourrait dire que Gentzen reprend ici un précepte méthodologique typiquement hilbertien (l'abstraction comme outil de régulation), mais appliqué ici à ... la méta-mathématique elle-même. Comme on le verra plus loin, ce goût esthétique pour la naturalité mathématique est partagé par Girard chez qui il confine au principe méthodologique (la naturalité est à la fois critère pour diriger l'enquête et indice de son succès) et prend le sens fort d'un dialogue avec la nature.

21. G. Gentzen, *Seconde démonstration*, in Largeault,« Intuitionisme et Théorie de la démonstration », p. 363

22. Comme le texte mathématique, la construction des preuves en déduction naturelle progresse toujours « vers le bas » (des hypothèses vers la conclusion). Le calcul des séquents introduit la possibilité, peu intuitive, d'une croissance du texte du côté des hypothèses, « vers le haut », ce qui dans la notation concrète du calcul des séquents, revient en fait à construire « à gauche » du signe de déduction – « Les grandes contributions des mathématiques à l'avancement de la connaissance de la nature reposent précisément sur la méthode qui consiste à idéaliser le donné pour s'en simplifier l'étude.», Gentzen (« Etat présent de la recherche sur les fondements des mathématiques », in Largeault, Intuitionisme et théorie de la démonstration, Vrin, Paris, 1992, p. 412)

23. « [...] la situation spéciale de la négation, qui dans le calcul naturel constitue une exception gênante [...] disparaît comme par enchantement [en calcul des séquents] » (je souligne), Gentzen, *Seconde démonstration*, in Largeault, « Intuitionisme et Théorie de la démonstration », p. 367. Ce propos de Gentzen fait écho aux difficultés qu'il a rencontrées pour généraliser au cas classique, sa preuve de normalisation des preuves en déduction naturelle intuitionniste, difficultés qui l'ont probablement conduit à sa preuve d'élimination des coupures, où ces difficultés disparaissent « comme par enchantement »

24. On pense à l'architectonique du calcul des séquents, avec son remarquable regroupement des règles en trois groupes : le groupe identité, le groupe logique, le groupe structurel.

$\forall$ et $\exists$. Tous les signes d'opérateurs sont profondément égaux en droit dans ce système ; aucun d'entre eux n'a la précellence sur les autres. Avant toute chose, la situation spéciale de la négation [...] disparaît comme par enchantement »[25].

Cette revendication explicite d'une suspension de l'imitation de « la part de nature » imputée au raisonnement humain, au profit d'une artificialité féconde et « mathématiquement plus naturelle », est sans enjeux directs du point de vue de la « fiabilité » (puisque calcul des séquents et déduction naturelle, par exemple classiques, sont équivalents du point de vue de la prouvabilité, et que l'un et l'autre sont justiciables de preuves de cohérence analogues du point de vue des moyens démonstratifs requis - autrement dit : puisque le niveau de « fiabilité » de la déduction naturelle et celui du calcul des séquents coïncident).

Pour autant, loin de constituer une simple « posture » esthétique, cet oubli du lien avec « le raisonnement naturel » montre que cette défense de la fiabilité à laquelle la naturalité désormais délaissée contribuait, n'est d'une certaine façon plus du tout prioritaire pour Gentzen (c'est d'ailleurs ce qu'il dira en passant, d'une incise laconique et déroutante, dans son panoramique *État présent des recherches sur les fondements des mathématiques* : « on n'a pas toujours à se soucier de la sûreté »[26]).

En effet, l'analyse des preuves du « calcul naturel » ayant mis au premier plan d'une part la *dynamique des preuves* comme processus concret, d'autre part l'idée qu'une preuve, au cours de ces transformations, est dans un *état* progressivement plus analytique, c'est désormais en regard de cette dynamique et de la notion d'analyticité que les règles font sens ; c'est eu égard à la socialité processuelle des règles que leurs propriétés doivent être envisagées ; et c'est en définitive dans cette socialité que se dévoile leur nature.

Ces nouveaux enjeux se comprennent mieux à partir de la distinction, introduite par Gentzen dans la définition de son "calcul des séquents", entre deux types d'opérations sur les preuves, de statuts radicalement hétérogènes.

---

25. Gentzen, *Seconde démonstration*, in Largeault, « Intuitionisme et Théorie de la démonstration », p. 367. Dans la « préface de l'édition Dover » (Mineola, New-York, USA, 2006), écrite spécialement pour la réédition de 2006 de« Natural deduction. A proof-theoretical study » (initialement publié dans« Stockholm studies in philosophy » series, Almqvist & Wiksell, Stockholm, 1965), Dag Prawitz considère que le problème rencontré par Gentzen dans sa preuve de normalisation en présence de la règle d'élimination de la double négation a motivé son passage au calcul des séquents.

26. Gentzen, *État des questions* ... (1938), p. 413 de Largeault,« Intuitionisme et Théorie de la démonstration ».

Le premier type d'opération est essentiellement celui de la *construction des énoncés* (et de leur *manipulation structurelle*) par des règles dans les preuves, un type de construction "par nature" analytique puisqu'il part du simple pour bâtir du complexe, analyticité toutefois brouillée en "déduction" pourtant "naturelle" par la présence, aux côtés des règles de construction ("introduction"), de règles de destruction ("élimination"). Si l'on prend seulement en compte ce premier type de règle, alors le passage de la déduction naturelle au calcul des séquents « revient à se libérer de la succession naturelle des propositions à l'intérieur d'une démonstration [. . .], pour instaurer à la place un ordre artificiel [. . .], celui de la croissance de la complexité des énoncés. » [27] (notons en passant comment la visée d'une propriété essentielle – ici l'analyticité – est ce qui justifie l'altération de « la naturalité » des systèmes de preuves, autrement dit la préférence donnée à l'artificialité).

Quoique semblant littéralement être "une règle parmi les autres" (au sens où elle permet comme les autres règles de former de nouvelles preuves à partir de preuves déjà formées), la seconde opération de construction de preuves introduite par Gentzen sous le nom de *coupure* (*Schnitt*) a un statut fondamentalement différent, celui d'une opération de *composition* des preuves, déclenchant l'interaction des règles (en ce lieu focal où l'analyticité est mise en défaut) qui concourent, par ce processus, à restaurer l'analyticité.

Sans doute l'idée de composition des preuves n'a pas encore chez Gentzen la clarté conceptuelle qu'elle acquerra une fois la correspondance de Curry-Howard repérée, et tout particulièrement chez Girard, dont l'ensemble des investigations en logique linéaire et plus récemment en ludique ont été invariablement accomplies sous l'œil régulateur de la composition des preuves et de l'interaction des règles.

En particulier, alors que la dynamique des preuves a, dans le travail de Gentzen, le statut d'un *outil* pour le logicien (outil cardinal certes, mais simple outil néanmoins) en vue de démonstrations de cohérence, l'œuvre logique de Girard, comme nous allons le voir, est traversée de part en part par l'idée que cette dynamique est l'*objet* même de la discipline, ou plutôt que l'interaction (dont la dynamique des preuves n'est qu'un cas particulier) est l'origine à partir de laquelle la logique doit être comprise et reconstruite, que c'est donc en elle que doit être recherché le véritable interface de la logique avec la nature.

27. Gentzen,« seconde démonstration », in Largeault,« Intuitionisme et Théorie de la démonstration », p. 367.

4. Nature de la logique et logique de la nature

La « naturalité » à laquelle nous renvoyait le premier Gentzen à travers l'appellation *Déduction naturelle* ne l'engageait que très modérément par rapport à ce problème philosophique de la « rencontre » de la logique avec la nature [28]. Si, en un sens, la naturalité du déducteur provient de son rattachement à la nature en tant qu'animal cognitif doté par l'évolution d'une « logique naturelle », elle n'induit aucun éclairage patent sur la « déraisonnable efficacité des mathématiques dans les sciences de la nature » par ailleurs constatable [29], et ne contribue en rien à expliquer « l'absence de certitude sensible » afférente aux « mathématiques participant, à travers la physique, à la reconstruction théorique du monde » [30].

En 1938, lorsque Gentzen publie son « État de la question des fondements », il reprend à son compte la conclusion de Weyl quant à la nature plurielle des mathématiques, qui juxtapose d'un côté la mathématique finitiste à la mesure de la « certitude sensible » et de « l'expérience mathématique », de l'autre la mathématique actualiste démesurée, « sans aucun espèce de "contenu de sens" du point de vue constructif » [31], mais adaptée à la « reconstruction théorique de la nature ».

Cette façon de voir, équilibrée, visant le compromis, est emblématique de cette sorte de « défaitisme » provoqué par la faillite du projet hilbertien de justification absolue de « la logique au sens large » par la cohérence – défaitisme qui va faire office de consensus dominant pendant le demi-siècle qui va suivre, au moins pour ce qui concerne

28. Conversement, rares sont les commentaires de Girard sur le « raisonnement naturel » et la « représentation intuitive des règles ». A part les remarques ordinaires sur la forme peu intuitive des règles du calcul des séquents (qui travaillent « du côté des hypothèses »), on notera cependant (à propos de la complétion des tests requise pour renforcer la dualité preuves / modèles), le commentaire sur les « habitants » de l'hypothèse spécifique d'un raisonnement par l'absurde : ces démonstrations avec un mauvais « point de vue » d'un énoncé réfuté (« la vérité subjective nous offre ainsi un espace de réfutation de tous les énoncés, y compris des vérités démontrées », « Le point aveugle », tome 2, p. 523).

29. E. Wigner, « The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences », in *Communications on Pure and Applied Mathematics*, XIII (1960) 1-14.

30. « [...] il n'est [...] plus nécessaire, lorsque les mathématiques participent à travers la physique au processus de reconstruction théorique du monde, que ce qui est d'ordre mathématique soit isolable en une région particulière de la certitude sensible », Hermann Weyl in « Die Stufen des Unendlichen », Iena, 1931 cité par Gentzen dans « État présent de la recherche sur les fondements des mathématiques » (p. 412, de Largeault, Intuitionnisme et théorie de la démonstration, 1992).

31. Gentzen, « État présent de la recherche sur les fondements des mathématiques », in Largeault, Intuitionnisme et théorie de la démonstration, p. 413.

la manière d'envisager, sur fond d'incomplétude, la « relation » de la logique à l'actualiste nature.

En fait, cette façon de voir condense aussi les deux points cruciaux sur lesquels la critique radicale de Girard va s'exercer en vue de ce qu'il faut bien appeler la refondation girardienne – où la question des « fondements » prend, comme on va le voir, un tout autre sens.

Le premier de ces points est celui du statut de l'infini. Envisagé par Girard (puisant ici à l'inspiration gentzenienne) comme « infini dynamique », celui-ci est disséqué par une analyse fine des formes concrètes de l'interaction des règles qui l'engendre (ces règles pour les « exponentielles » que la « décomposition » de la dynamique de la logique par la logique linéaire a visibilisées [32]), jusqu'à faire apparaître des niveaux d'infini dynamique « intermédiaires » (caractérisant des classes de complexité algorithmique faible données, où survivent les entiers cependant), *naturels* non seulement au sens où la procéduralité des règles suffit à les engendrer (les évaluations auxquelles les systèmes logiques en question peuvent donner lieu, autrement dit leur pouvoir de représentation, est borné *par nature*), mais aussi au sens où l'ensemble des processus que chacun de ces niveaux d'infini dynamique déterminent forme un système calculatoire où la police de l'évaluation qu'induisent intrinsèquement les règles (stratification ...) n'entravent pas l'interaction ni n'obèrent ses propriétés essentielles (terminaison, confluence ...) [33]. Cette identification d'un infini mesuré, émergent naturellement – à mettre en contraste avec l'infini *postulé* de la théorie des ensembles – n'est que l'un des leviers de la déconstruction girardienne du credo « essentialiste » en une nature dont le *grand livre* aurait été écrit en langage ensembliste. Ce même impératif de contournement de l'*ensemblisme* (et de son interface imposé) est par ailleurs réaffirmée par Girard, logicien scélérat [34], lorsqu'il se gausse des treillis orthomodulaires des artisans de la « logique quantique » (qu'il compare à Xersès, inventeur de la flagellation pour mer indocile : « on marque ainsi une réprobation très frégéenne devant l' « erreur » commise par la nature » coupable de n'être pas ensembliste [35]) pour aussitôt inviter le logicien à se mettre plutôt « à l'école de la nature » [36].

Pour autant, il ne s'agit pas pour Girard de remplacer le langage ensembliste par un autre, mais plus radicalement, en amont – et c'est

32. J.-Y. Girard, « Linear logic », Theoretical computer science » 50, p. 1-102, 1987.

33. Cf. J.-Y. Girard, «Light linear logic », Information and Computation 143, p. 175-204, 1998.

34. Antonio Mosca, « Jean-Yves Girard, le logicien scélérat », revue Critique, vol. 61, n°701, p. 743-757, Paris, 2005.

35. « Le point aveugle », p. 407

36. « Le point aveugle », p. 408.

le deuxième point – de revenir sur le statut même de ce *langage* dans lequel le *grand livre* est censé être écrit. Pour démonter l'apparente impossibilité d'une rencontre des mathématiques et du monde, Girard commence par briser leur face-à-face : il déconstruit la part *mythique* de la distinction entre « syntaxe » et « sémantique » (preuves et interprétations) en se plaçant au point de vue unificateur des processus (une preuve, c'est un processus de recherche de preuve qui réussit ; une contre-interprétation, c'est un processus de recherche de preuves qui échoue). Pour comprendre comment cette unification ne sombre pas dans l'aporie herméneutique (« quand la distinction entre le langage et le monde est abolie, tout devient signe, source d'interprétation et de signification »), il importe de saisir le statut inhabituel du langage logique dans ce contexte, à savoir celui d'une construction émergente, seconde par rapport à l'interaction processuelle et indépendante de tout présupposé quant à la vérité ou la fausseté : ainsi un « type logique » (une formule - qu'on peut envisager, pour guider l'imagination, comme ultérieurement définie par un ensemble de règles de manipulation attachées aux connecteurs qui la structurent) est un ensemble de processus (d'agents, de stratégies) qui, constructions rares dans la nature, réagissent identiquement à tous les tests [37]. Il est crucial ici d'observer que le caractère second, émergent, *a posteriori*, des règles logiques, invite à être prêt, à l'issue de l'entreprise de *reconstruction géométrique* [38] de la logique (pour l'instant accomplie par Girard seulement pour la partie « perfective » de la logique), à toutes les éventualités. . .y compris celle de contredire, au terme de la reconstruction, les bonnes vieilles règles de la logique classique.

Ces investigations girardiennes sur la *nature de la logique*, cette longue descente de la *logique naturelle* de Gentzen vers ses sous-sols [39] jusqu'aux principes de l'interaction, rejoignent ce qu'on pourrait qualifier, en un sens non métaphorique, une *logique de la nature*. En effet, avec la conception girardienne, la vision "cybernétique" de la logique (le raisonneur comme centre computationalo-représentationnel autonome

37. Ces travaux de Girard forment le chapitre Ludique de son œuvre, dont la première présentation fut donnée dans « Locus Solum », in *Mathematical Structures in Computer Science* 11, p. 301-506, 2001. Le domaine est ardu et me semble plus clairement accessible (ainsi que les considérations sur le dialogue avec la physique quantique) via l'exposé proposé dans le tome 2 du Point aveugle.

38. J.-Y. Girard dans « La logique comme géométrie du cognitif », in Logique, dynamique et cognition, sous la dir. de J-B. Joinet, Publications de la Sorbonne, Paris, 2007.

39. Une spéléologique en somme. . .

face au monde, doté par la nature d'une faculté de raisonnement régie par des lois que le logicien explicite) prédominante dans le paradigme du cognitivisme contemporain, se voit remplacée par une approche du logique radicalement différente, où la dimension computationelle apparaît décentralisée, indépendante de tout centre organisé de représentation cognitive, mais résultant seulement de l'interaction sous toutes ses formes, à toute échelle (et donc au plus près des formes physiques de la transmission de l'information), soumise seulement à la pulsation concurrente des actions et des réactions.

Address for Offprints:
Jean-Baptiste Joinet
UFR de Philosophie
Université Paris 1 (Panthéon-Sorbonne)
17, rue de la Sorbonne
75231 Paris cedex 5
France.

Author's Vitae

J-B. Joinet

Specialist of *Proof theory* and *Logical foundations of computer science*, the author is associated professor in Logic and Philosophy of Logic at University Panthéon-Sorbonne (Paris 1), where he is responsible for the *Parcours de Logique* (undergraduate and graduate teaching program in Logic). After having been member of the *Mathematical Logic team* (CNRS, University Paris 7), he integrated the *Proofs-Programs-Systems team* (CNRS, University Paris 7), a laboratory where logicians and computer scientists cohabit. Since 2009, he is a member of the "Centre International de Recherches : Lettres, Philosophie, Savoirs" (CIRPHLES, USR 3308, CNRS & École Normale Supérieure de Paris, Philosophy department).
joinet@univ-paris1.fr